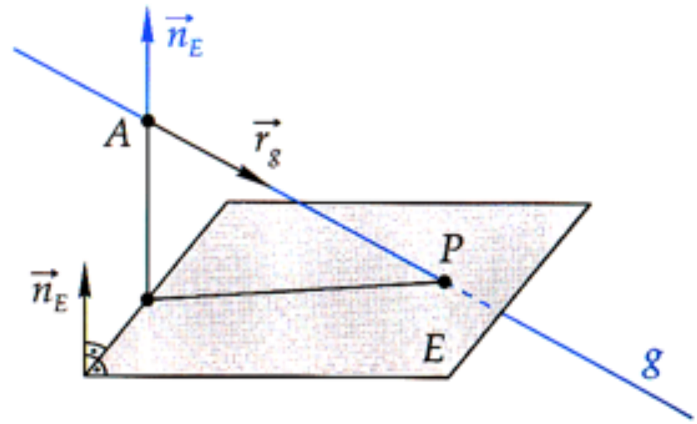
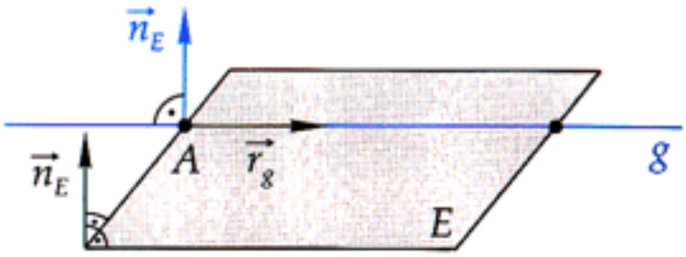
Lagebeziehung Gerade – Ebene

(1) Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich



$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g \neq 0$: Die Gerade g durchstößt die Ebene E in genau einem Punkt P.

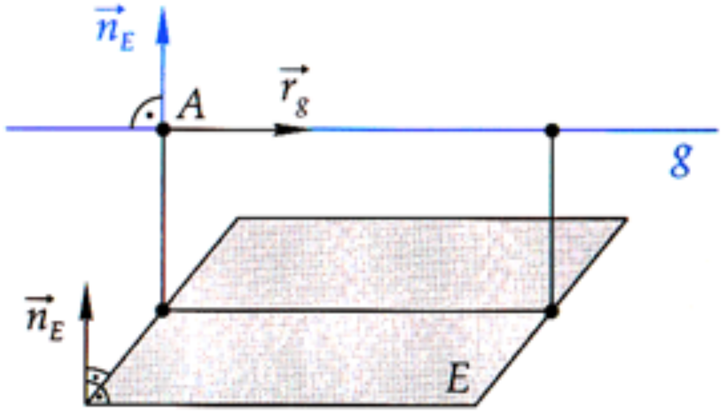
(2) Die Gerade g liegt ganz in der Ebene E



$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A der Geraden g ist auch ein Punkt der Ebene E.

$\Rightarrow$ Die Gerade g liegt ganz in der Ebene E.

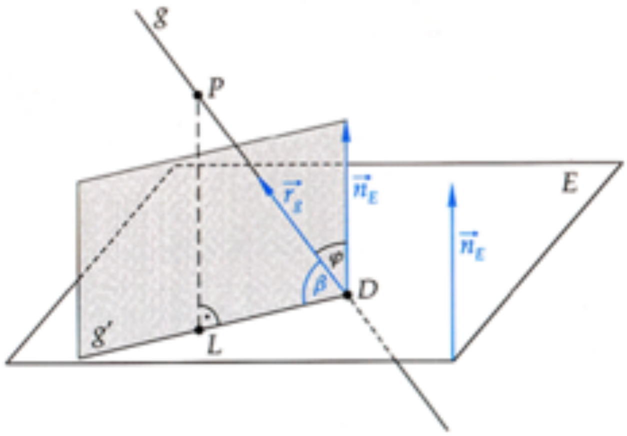
(3) Die Gerade g ist echt parallel zur Ebene E



$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A der Geraden g liegt nicht in der Ebene E.

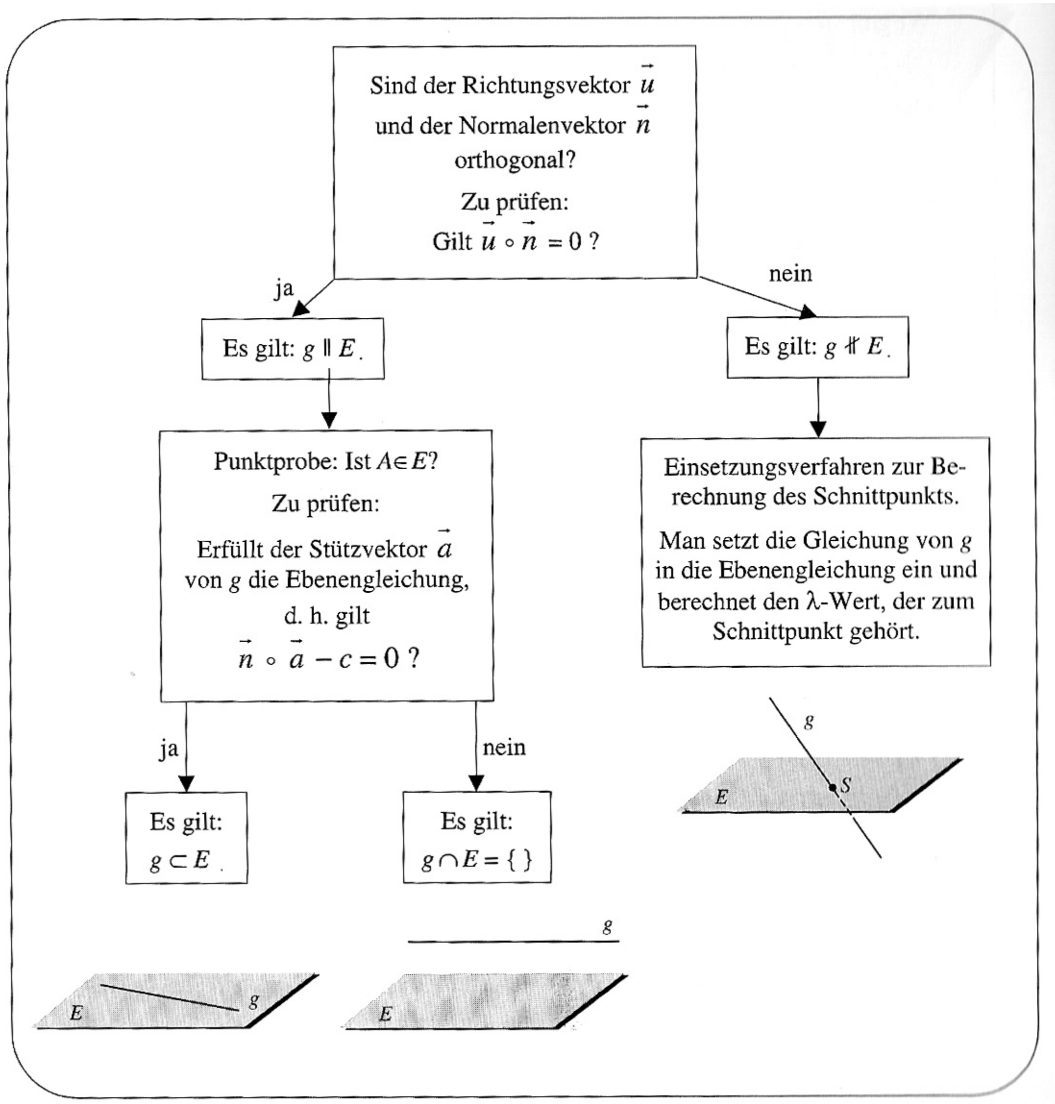
$\Rightarrow$ Die Gerade g verläuft in einem bestimmten Abstand parallel zur Ebene E.

Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E:



$$\sin\beta = \frac{\left|\vec{r}_g \circ \vec{n}_E\right|}{\left|\vec{r}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_E\right|} \quad \text{und } 0° < \beta < 90°$$

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen:



Aufgaben:

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 15 = 0$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und geben Sie

gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an. ○

2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 20 = 0$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ○

3 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$E: -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 20 = 0$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Bestimmen Sie die Maßzahl des Schnittwinkels zwischen der Ebene

$E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 15 = 0$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

mit den Koordinatenebenen.

Bemerkung:

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen heißen Spurpunkte.

6 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene $E: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 25 = 0$ mit den Koordinatenachsen.

7.0 Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene E und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.

7.1 $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

7.2 $E: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5 = 0$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8 Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ liegt.

9.0 Die folgende Rechnung zeigt einen Teil der Untersuchung der Lagebeziehung einer Ebene E und einer Geraden g:
$2(4+r)-4(-2)+3(3+2r)=9 \quad \Rightarrow 25+8r=9 \quad \Rightarrow 8r=-16$

9.1 Geben Sie ohne weitere Rechnung die Lagebeziehung von g und E an.

9.2 Bestimmen Sie eine mögliche Geradengleichung von g sowie eine mögliche Ebenengleichung von E.

9.3 Ändern Sie die eine der Koordinaten der Geraden g so ab, dass g in der Ebene E liegt.

10.0 Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -k+1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$ mit $s,k \in \mathbb{R}$ sowie die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9 = 0$.

10.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H, in der alle Geraden g_k liegen.

10.2 Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Geraden g_k zur Ebene E in Abhängigkeit von k.

Lösungen:

1

Einsetzen der Koordinatengleichungen von g in die Ebene E:

$3\cdot(-2+2t)-4\cdot(5-3t)+(3+t)-15=0$

$19t-38=0 \quad \Rightarrow t=2$

$\Rightarrow$ die Gerade g und die Ebene E schneiden sich

Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(2/-1/5)$$

2

$2\cdot(-2-t)-(-4+2t)+4\cdot(5+t)-20=0$

$\Rightarrow 0=0$

$\Rightarrow$ die Gerade g liegt ganz in der Ebene E

3

$-2\cdot(-2-t)+(3+2t)-4\cdot(-5+t)+20=0$

$\Rightarrow 47=0$

$\Rightarrow$ die Gerade g liegt echt parallel zur Ebene E

4

$$\vec{r}_g\circ\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}=6+12+1=19$$

$$\left|\vec{r}_g\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14} \qquad \left|\vec{r}_E\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \sin\beta=\frac{|19|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}\approx 0{,}9959 \quad \Rightarrow \beta\approx 84{,}79^\circ$$

5

Schnittpunkt mit der x_1-x_2-Ebene: $x_3=0$

$\Rightarrow 3+2k=0 \quad \Rightarrow k=-1{,}5 \quad \Rightarrow S_1(2/2{,}5/0)$

Schnittpunkt mit der x_1-x_3-Ebene: $x_2=0$

$\Rightarrow 4+k=0 \quad \Rightarrow k=-4 \quad \Rightarrow S_2(2/0/-5)$

Schnittpunkt mit der x_2-x_3-Ebene: $x_1=0$

$\Rightarrow 2=0 \quad \Rightarrow$ es gibt keinen Schnittpunkt mit der x_2-x_3-Ebene

6

Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $g_1 : \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2 \cdot k + 25 = 0 \quad \Rightarrow k = -\frac{25}{2} \quad \Rightarrow S_1(-\frac{25}{2}/0/0)$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $g_2 : \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -5 \cdot k + 25 = 0 \quad \Rightarrow k = 5 \quad \Rightarrow S_2(0/5/0)$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $g_3 : \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3 \cdot k + 25 = 0 \quad \Rightarrow k = -\frac{25}{3} \quad \Rightarrow S_3(0/0/-\frac{25}{3})$

7.1

Umwandeln von E in Normalenform: $E: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5 = 0$

$\Rightarrow 5 \cdot (-s) + 4 \cdot (-2 - 4s) + 3 \cdot (4 + 7s) - 5 = 0$

$\Rightarrow -1 = 0 \quad \Rightarrow$ die Ebene E und die Gerade g sind echt parallel

7.2

$5 \cdot (2 - 3s) + 4 \cdot (1 + 3s) + 3 \cdot 2s - 5 = 0$

$\Rightarrow s = -3$

Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes:

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(11/-8/-6)$

8

$-(3 + 2k) + 2 \cdot (-1 + k) + 2 \cdot (a + kb) - 3 = 0$

$\Rightarrow 2a - 8 + 2kb = 0$

in der Ebene liegen heißt: $2a - 8 = 0 \quad \Rightarrow a = 4$

$2kb = 0 \quad \Rightarrow b = 0$, falls $k \neq 0$

$\Rightarrow$ b beliebig, falls k = 0

9.1 Die Gerade g und die Ebene E haben einen gemeinsamen Punkt.

9.2

$$E: 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

9.3 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$

10.1 $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \cdot k + s \\ 2s \\ s \cdot k \end{pmatrix} \Rightarrow H: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10.2 g_k in E einsetzen:

$$(-3 - s \cdot k + s) + 2 \cdot (4 + 2s) - 2(1 + s \cdot k) - 9 = 0$$

$$-3 - s \cdot k + s + 8 + 4s - 2 - 2s \cdot k - 9 = 0 \quad \Rightarrow -3s \cdot k + 5s - 6 = 0 \quad \Rightarrow s \cdot (-3k + 5) - 6 = 0$$

$\Rightarrow k = \frac{5}{3}$: $g_{\frac{5}{3}}$ echt parallel zu E

$\Rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$: g_k und E schneiden sich in einem Punkt